# ملخص الاشتقا ق ذ محمد الرقبة www.0et1.com

## الدوال القابلة للاشتقاق

### 1 : اشتقاق دالة في نقطة

#### أ- تعريف :

نقول عن دالة $f$ معرفة على مجال مفتوح مركزه $x_0$ أنها قابلة للاشتقاق في $x_0$ إذا كانت للدالة $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

نهاية $l$ عند **0** . العدد $l$ يسمى العدد المشتق للدالة $f$ في $x_0$ ونرمز له ب : $f'(x_0)$ أو $\frac{df}{dx}$ ونكتب :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

الدالة التآلفية $h \mapsto f'(x_0).h+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة $f$ في $x_0$ .

#### ب - مبرهنة :

تكون دالة $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $a$ ودالة $\varphi$ معرفة في مجال مفتوح مركزه الصفر بحيث :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+a.h+\varphi(h).h \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

العدد $a$ هو العدد المشتق $f'(x_0)$ .

#### جـ مبرهنة :

إذا كانت دالة $f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$ فإنها متصلة في $x_0$ .

### 2 : الاشتقاق على اليمين، الاشتقاق على اليسار

#### تعريف :

نقول عن دالة $f$ معرفة في مجال على شكل $[x_0,x_0+\alpha[$ $(\alpha \succ 0)$ إنها قابلة للاشتقاق على اليمين في $x_0$ إذا كانت الدالة

$x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية $l$ على اليمين في $x_0$ .

العدد $l$ يسمى العدد المشتق للدالة $f$ في $x_0$ على اليمين. ويمز له بالرمز : $f'_d(x_0)$

ونكتب : $$f'_d(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\succ x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

نعرف بالمثل الاشتقاق في $x_0$ على اليسار.

### 3 : الدالة المشتقة وعمليات على الدوال المشتقة

#### أ- تعريف :

نقول إن دالة $f$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $I$ .

الدالة : $f':x \to f'(x)$ من $I$ نحو $\mathbb{R}$ تسمى الدالة المشتقة للدالة $f$ على $I$ .

#### ب- نتائج :

* مشتقة المجموع : إذا كانت $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق في $x_0$ فإن المجموع $f+g$ دالة قابلة للاشتقاق في $x_0$

ولدينا : $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

* مشتقة الجداء : إذا كانت $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق في $x_0$ فإن الجداء $f.g$ دالة قابلة للاشتقاق في $x_0$

ولدينا : $(fg)'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0)$

* إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق في $x_0$ وكان $\lambda$ عددا حقيقيا فإن الدالة $\lambda f$ قابلة للاشتقاق في $x_0$

ولدينا : $(\lambda f)'(x_0)=\lambda.f'(x_0)$

* **مشتقة المقلوب :** إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق في $x_0$ وتحقق $f(x_0)\neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للاشتقاق في $x_0$

ولدينا : $$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=-\frac{f'(x_0)}{\left(f(x_0)\right)^2}$$

* **مشتقة الخارج :** إذا كانت $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق في $x_0$ وكان $g(x_0)\neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق في $x_0$

ولدينا : $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

## 4 : مشتقات بعض الدوال الاعتيادية

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\lambda,\lambda\in\mathbb{R}$ | $\mathbf{0}$ |
| $x$ | $\mathbf{1}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x$ |
| $\left[u(x)\right]^n$ | $n.\left[u(x)\right]^{n-1}.u'(x)$ |

## 5 : مشتقة دالة مركبة

**مبرهنة :**

إذا كانت الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ وكانت الدالة $g$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $f(]a,b[)$ فإن الدالة المركبة $gof$ قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ ومشتقتها هي :

$$(gof)'=(g'of).f'$$

أي : لكل $x$ من $I$ لدينا: $$(gof)'(x)=g'(f(x)).f'(x)$$

## 6 : مشتقة الدالة العكسية

**أ- مبرهنة :**

لتكن $f$ دالة متصلة ورتيبة قطعا في المجال $[a,b]$.

إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق في $]a,b[$ وكانت دالتها المشتقة $f'$ لا تنعدم فإن الدالة العكسية $f^{-1}$ قابلة للاشتقاق في المجال $]f(a),f(b)[$ ( أو $]f(b),f(a)[$ ) . ولدينا :

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

**ب- مبرهنة :**

دالة الجذر من الرتبة $n$ حيث $\left(f(x)=\sqrt[n]{x}\right)$ قابلة للاشتقاق في المجال $]0,+\infty[$ ومشتقتها هي :

$$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

www.0et1.com

*** خاصية:**

لتكن $f$ و $g$ دالتين بحيث تكون $g \succ 0$ و $f(x)=\left[g(x)\right]^{\frac{1}{n}}$

أي : $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$

إذا كانت $g$ قابلة للاشتقاق فإن $f$ قابلة للاشتقاق ولدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{n}\left[g(x)\right]^{\frac{1}{n}-1}.g'(x)$$

*** خاصية :**

إذا كان $r$ ينتمي إلى $\mathbb{Q}^*$ فإن الدالة $x \mapsto x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا : $(x^r)'=rx^{r-1}$

### جـ- جدول بعض المشتقات :

| الدالـــة | مشتقتها |
|---|---|
| $f(g(x))$ | $f'(g(x)).g'(x)$ |
| $f^{-1}(x)$ | $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ |
| $x^r , r\in\mathbb{Q}^*$ | $r.x^{r-1}$ |
| $\left[f(x)\right]^r , r\in\mathbb{Q}^*$ | $r.\left[f(x)\right]^{r-1}.f'(x)$ |
| | |

## 7 : المشتقات المتتالية :

### تعريف :

* إذا كانت الدالة $f$ قابلة للاشتقاق في المجال $]a,b[$ وكانت الدالة $f'$ هي نفسها قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة $f$ ونكتب : $f''$ .

أو $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ أو $f^{(2)}$ .

* بصفة عامة نعرف بالترجع الدوال المشتقة المتتالية لدالة $f$ إذا كانت هذه المشتقات موجودة.

$$f''=(f')' \quad \text{و} \quad f^{(3)}=(f'')',\ldots,f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)'$$

الدالة $f^{(n)}$ تسمى الدالة المشتقة من الرتبة $n$ للدالة $f$ على المجال $]a,b[$ .

## 8 : رتابة دالة وإشارة الدالة المشتقة

### أ- مبرهنة :

لتكن $f$ دالة متصلة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في المجال $]a,b[$ .

إذا كان لدينا $f'(x)\succ 0$ لكل $x$ من $]a,b[$ فإن $f$ تكون تزايدية قطعا على المجال $[a,b]$.

وإذا كان لدينا $f'(x)\prec 0$ لكل $x$ من $]a,b[$ فإن $f$ تكون تناقصية قطعا على المجال $[a,b]$.

### ب- مبرهنة :

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق في المجال $]a,b[$ وليكن $c$ عنصرا من $]a,b[$ .

- إذا كان $f'(x)\succ 0$ لكل $x$ من $]a,c[$ و $f'(x)\prec 0$ لكل $x$ من $]c,b[$ فإن الدالة $f$ تكون لها قيمة قصوية نسبية في $c$.
- إذا كان $f'(x)\prec 0$ لكل $x$ من $]a,c[$ و $f'(x)\succ 0$ لكل $x$ من $]c,b[$ فإن الدالة $f$ تكون لها قيمة دنوية نسبية في $c$.

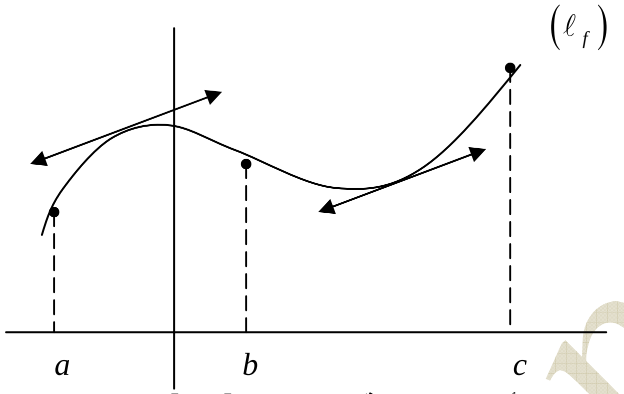
## 9 : التقعر ونقط الانعطاف

### أ- تعريف :

www.0et1.com

نقول عن تمثيل مبياني لدالة إن له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة في المجال $]a,b[$ إذا كان المماس في كل نقطة $\left(x, f\left(x\right)\right)$ يوجد تحت التمثيل المبياني.

ونقول إن تقعره موجه نحو الأراتيب السالبة إذا كان المماس في كل نقطة $\left(x, f\left(x\right)\right)$ يوجد فوق التمثيل المبياني.




تقعر $\left(\ell_f\right)$ موجه إلى الأراتيب الموجبة على المجال $[b,c]$.

تقعر $\left(\ell_f\right)$ موجه إلى الأراتيب السالبة على المجال $[a,b]$.

**ب- مبرهنة :**

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق

- إذا كانت دالتها المشتقة $f'$ تناقصية فإن تقعر منحنى $f$ موجه نحو الأراتيب السالبة.
- إذا كانت دالتها المشتقة تزايدية فإن تقعر منحنى $f$ موجه نحو الأراتيب الموجبة.

**جـ- مبرهنة :**

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين.

- إذا كانت الدالة المشتقة الثانية $f''$ سالبة قطعا فإن تقعر منحنى $f$ موجه نحو الأراتيب السالبة.
- إذا كانت الدالة المشتقة الثانية $f''$ موجبة قطعا فإن تقعر منحنى $f$ موجه نحو الأراتيب الموجبة.

**د- تعريف :**

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق و $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ نقطة من تمثيلها المبياني.

إذا كان تقعر منحنى $f$ عن يمين $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ مخالفا لتقعره عن يسار $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

فإن النقطة $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ تسمى نقطة انعطاف.

**هـ- مبرهنة :**

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين.

تكون النقطة $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة الثانية $f''$ تنعدم في $x_0$ وتغير إشارتها.

www.0et1.com